Medición de la aceleración de la gravedad
Masa unida a un resorte

Física Experimental I
Octubre 2010

Fernández, Yohanna (yoko_6_10@hotmail.com)
Guariste, Maximiliano (maxi_862@hotmail.com)
Correa, Pablo (pablogcorrea@hotmail.com)

Resumen

Este trabajo se propone hallar el valor de la aceleración de la gravedad en Tandil estudiando el comportamiento de una masa unida a un resorte. Para ello nos valemos de la ley de Hooke y la teoría de movimiento oscilatorio armónico simple para obtener un valor de la aceleración de $9{,}8\frac{m}{s^2}$ con una incertidumbre del 1%

Palabras clave: Aceleración de la gravedad, ley de Hooke, movimiento armónico simple

Introducción

El valor de la aceleración de la gravedad puede ser calculado mediante un cuerpo que se cuelga en reposo de un resorte. Las fuerzas que intervienen para lograr el equilibrio son el peso $\bar{P}=m\bar{g}$ del cuerpo, donde m es la masa de este cuerpo y $\bar{g}$ es la aceleración de la gravedad; y la fuerza $\bar{F}_r$ de restitución ejercida por un resorte ideal sobre la masa. La ley de Hooke da una expresión para esta fuerza

$$\bar{F}_r=-k\,\Delta\bar{x} \qquad (1)$$

donde k es la constante de fuerza del resorte, $\Delta\bar{x}$ el es el desplazamiento de la partícula a partir de su posición de equilibrio y el signo negativo indica que la fuerza tiene dirección opuesta al desplazamiento $\Delta\bar{x}$. Esta relación lineal es válida hasta cierto valor limite de $\Delta\bar{x}$ que depende de la naturaleza del resorte.

En la situación de equilibrio la fuerza peso aplicada al resorte es contrarrestada por la fuerza de restitución $\bar{F}_r$ (1)

$$\sum\bar{F}=m\bar{g}-k\,\Delta\bar{x}=0 \qquad (2)$$

Ahora consideremos que se desplaza la masa verticalmente una distancia x de la posición de equilibrio vertical, entonces la resultante de las fuerzas será

$$\sum \bar{F} = m\bar{g} - k(\Delta\bar{x} + \bar{x}) = -k\bar{x} \qquad (3)$$

Es decir aparece una fuerza de recuperación lineal, por lo que el movimiento de la masa será un movimiento oscilatorio armónico simple, que se puede describir por la ecuación diferencial [1]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (4)$$

La solución de esta ecuación es una representación matemática de la posición de una partícula en función del tiempo, de la cual se puede obtener una expresión para el período T del movimiento oscilatorio [2]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (5)$$

Teniendo en cuenta la masa del resorte, la expresión del periodo T se modifica de la siguiente forma [3]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + cm_r}{k}} \qquad (6)$$

En donde m_r es la masa del resorte y c es una constante.
En nuestro experimento obtendremos el valor de $\bar{g}$, previo cálculo de la constante k por el método dinámico dado en la expresión (5).

Procedimiento

El valor de $\bar{g}$ se obtuvo siguiendo dos etapas. En la primera calculamos la constante k del resorte a partir del período de oscilación de la masa, y en la segunda, utilizando este k, determinamos g a partir de la expresión (2).
Para el experimento se utilizó un resorte uniforme y sin deformaciones visibles, brindado por la cátedra, suspendido de un soporte Pasco. Y cuatro masas de distintos valores (tabla 1)

i	$m_i(kg)$
1	0,050
2	0,063
3	0,075
4	0,089

Tabla 1
Masas utilizadas

medidos con una balanza digital Electronic Kitchen Scale QE-400 con resolución de $0,001\,kg$.

Se fijaron tanto la unión del soporte con el resorte, como de este último con cada masa, para evitar movimientos no deseados al momento de medir oscilaciones.
Medimos con una escala vertical las diferencias de longitud entre el resorte sin ninguna masa colgando y el resorte con cada una de las cuatro masas en equilibrio, midiendo sus valores en la espira inferior del resorte (ver figura 1).

Figura 1

Foto 1 — Resorte sin ninguna masa colgando

Foto 2 — Masa colgada al resorte

Los períodos se midieron con un fotosensor Pasco ME-9215A-220 con una resolución de $0.001 seg$. Para ello pusimos a oscilar verticalmente cada masa y medimos 10 períodos. Incorporamos a cada masa una extensión horizontal que pasara por el fotosensor durante la oscilación para una correcta detección por parte del instrumento.

Resultados

En la tabla 2 se muestran los resultados de los períodos para cada masa

$Masa(kg)$	$T(seg)$	$Masa(kg)$	$T(seg)$
$0{,}050 \pm 0{,}001$	$0{,}810 \pm 0{,}001$	$0{,}075 \pm 0{,}001$	$0{,}984 \pm 0{,}001$
	0,807		0,984
	0,807		0,983
	0,810		0,982
	0,806		0,982
	0,810		0,982
	0,807		0,983
	0,808		0,983
	0,809		0,983
	0,807		0,983

$0{,}063\pm0{,}001$	$0{,}914\pm0{,}001$	$0{,}089\pm0{,}001$	$1{,}074\pm0{,}001$
	0,914		1,084
	0,918		1,070
	0,912		1,080
	0,912		1,073
	0,918		1,069
	0,912		1,081
	0,917		1,067
	0,913		1,078
	0,915		1,075

Tabla 2
Se representan 10 períodos de oscilación medidos para cada masa

Se representa gráficamente T^2 en función de m (figura 2), y se logra obtener la constante k mediante la linealización de la expresión (5)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m \qquad (7)$$

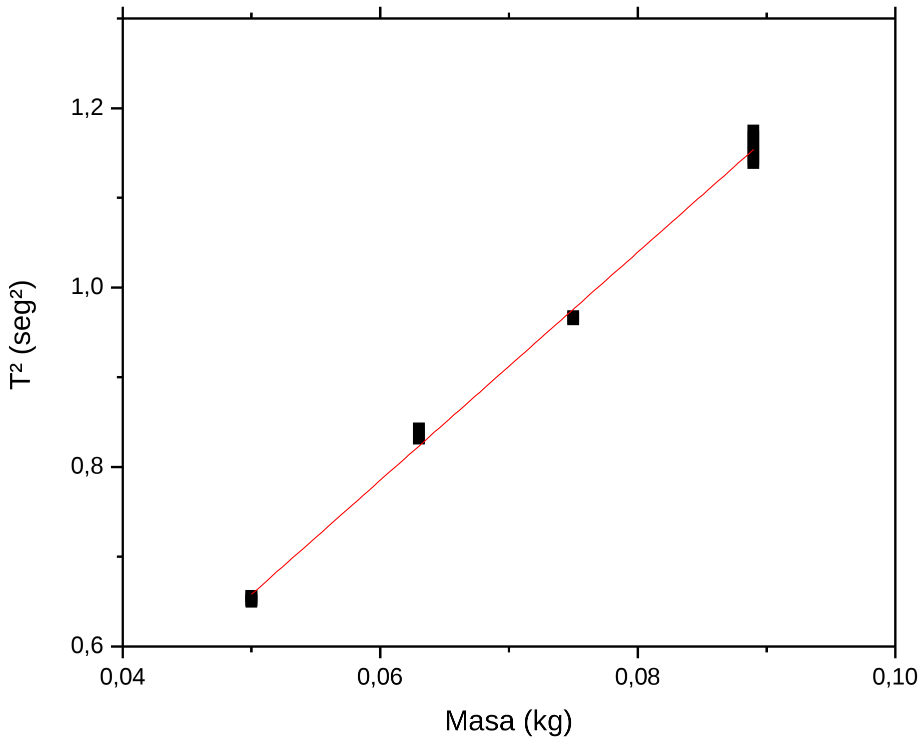

Figura2. Cuadrado del periodo de oscilación en función de la masa. La línea continua corresponde a un ajuste de una recta a los datos experimentales.

Al aplicar el método de regresión lineal sobre T^2 vs. m se obtienen los siguientes resultados

$$\alpha_k = 12{,}712 \pm 0{,}120\,\frac{m}{N}$$
$$\beta_k = 0{,}023 \pm 0{,}008\,s^2$$
$$r_k = 0{,}998$$

Donde α_k es la pendiente de la recta de ajuste, β_k es la ordenada al origen, ambas con sus correspondientes desviaciones estándar, y r es el coeficiente de correlación lineal (si $r = \pm 1$ la relación entre las variables T^2 y m es lineal).

De la expresión (7) tenemos

$$\alpha_k = \frac{4\pi^2}{k} \qquad (8)$$

Con lo cual

$$k = \frac{4\pi^2}{\alpha} = 3{,}11\,\frac{N}{m} \qquad (9)$$

y su incertidumbre absoluta será

$$\Delta k = \frac{4\pi^2}{\alpha^2}\,\Delta\alpha = 0{,}03\,\frac{N}{m} \qquad (10)$$

A continuación se muestran los valores de los desplazamientos para las masas en equilibrio.

Masa (kg)	Δx (m)
$0{,}050 \pm 0{,}001$	$0{,}133 \pm 0{,}001$
0,063	0,177
0,075	0,212
0,089	0,257

Tabla 3

De la expresión (2) observamos que la relación entre Δx y m es lineal (figura 3)

$$m\,\frac{g}{k} = \Delta x \qquad (11)$$

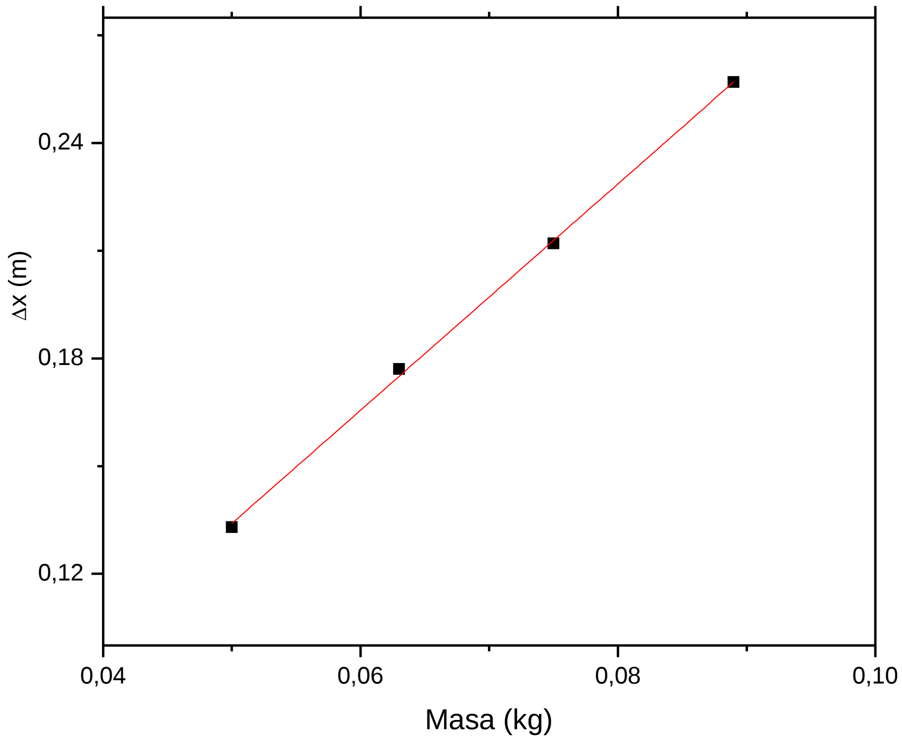

Figura 3. Desplazamiento en función de la masa. La línea continua corresponde a un ajuste de una recta a los datos experimentales.

Mediante un ajuste lineal se encuentran los siguientes valores

$$\alpha = 3{,}156 \pm 0{,}013 \frac{m}{kg}$$
$$\beta = -0{,}024 \pm 0{,}001\, m$$
$$r = 0{,}999$$

(α es la pendiente de la recta, β la ordenada al origen y r el coeficiente de regresión lineal)

La pendiente de la recta de aproximación es $\alpha = \frac{g}{k}$, por lo que g será

$$g = \alpha k = 9{,}802 \frac{m}{s^2} \qquad (12)$$

Con una incertidumbre absoluta de

$$\Delta g = g\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta k}{k}\right) \qquad (13)$$

Así el valor medido de g fue

$$g=9{,}8\pm 0{,}1\frac{m}{s^2} \qquad (14)$$

Análisis

El valor calculado de la aceleración de la gravedad fue $g=9{,}8\pm 0{,}1\frac{m}{s^2}$ lo que representa un intervalo de incertidumbre $(9{,}7-9{,}9)\frac{m}{s^2}$, donde se encuentra el valor de g medido con técnicas más precisas.[4]

El coeficiente $r=0{,}999$ pone de manifiesto la linealidad entre las variables m y Δx . Sin embargo vemos que el intervalo $\beta\pm z_{0,95}\sigma_\beta$ ($-0{,}024\pm 0{,}002m$ intervalo de confianza del 95%) no contiene al cero. Lo que indica la presencia de algún error sistemático. Éste puede deberse a una medición por exceso de las masas o que se hayan medido por defecto los desplazamientos. Estos últimos debido al problema de medir una longitud sin estar en contacto con el resorte para no sacarlo del equilibrio.

Así también , en la determinación de k , se observa una clara relación lineal entre T^2 y m dada por el coeficiente $r_k=0{,}998$. Sin embargo que el intervalo $\beta_k\pm z_{0,95}\sigma_{\beta_k}$ $(0{,}023\pm 0{,}016s^2)$ no contenga al cero puede deberse tanto en un error sistemático de la medición del período o de la masa como también a la contribución de la masa del resorte, que eleva la recta de ajuste. Esto se ve cuando se linealiza la expresión (6) de la siguiente forma

$$T^2=\frac{4\pi^2}{k}m+\frac{4\pi^2}{k}cm_r \qquad (15)$$

La masa del resorte agrega un término independiente a la ecuación de la recta de ajuste, sin modificar su pendiente.

Por último, obtener un valor límite de Δx para el cual la ley de Hooke representa un buen modelo en nuestro experimento, excede a nuestras posibilidades.

Conclusión

En este trabajo se logró medir la aceleración de la gravedad $g=9{,}8\pm 01\frac{m}{s^2}$ con una incertidumbre del 1% y valor cercano al obtenido con experimentos más precisos (ver referencia 4).

Además se consideró necesario estimar k y se obtuvo este parámetro hasta entonces desconocido del resorte.

Para futuros experimentos se puede mejorar o modificar el procedimiento para obtener valores mas exactos, sobre todo de los desplazamientos Δx como de los períodos de oscilación.

Referencias

(1)- Resnick, Halliday, Krane, *Física Vol. I*, cuarta edición (2001)
(2)- Serway, Jewet, *Física I*, 2004, Inernational Thomson Editores,
(3)- Arrieta A., Arrieta E.S., Tejeiros J.M., Masa *Efectiva para un sistema de muelle real*, Revista Colombiana de Física vol 41 No. 2, Abril 2009.
(4)- Mac Intyre, Portillo, *Medición de la gravedad*, Física Experimental I, Noviembre de 2006.